##

К решению задач

3.1 Как найти путь или перемещение по известной траектории движения?

В задачах при нахождении пути и перемещении необходимо помнить определения (1.6) и (1.7), то есть:

— для нахождения пути из геометрических соображений находим длину траектории;

— для нахождения перемещения, соединяем начальную точку с конечной и ищем длину получившегося вектора.

3.1.2 Тело прошло четверть окружности.

Путь:

$$L=\frac{1}{4}\cdot 2\pi R=\frac{1}{2}\pi R. \text{ (1.26)}$$

Перемещение:

$$|\overrightarrow{\Delta r}|=\sqrt{R^2+R^2}=\sqrt{2}R. \text{ (1.27)}$$

3.1.3 Тело прошло пол окружности.

Путь:

$$L=\frac{1}{2}\cdot 2\pi R=\pi R. \text{ (1.28)}$$

Перемещение:

$$|\overrightarrow{\Delta r}|=R+R=2R \text{ (1.29)}$$

3.14 Тело прошло три четверти окружности.

Путь:

$$L=\frac{3}{4}\cdot 2\pi R=\frac{3}{2}\pi R. \text{ (1.30)}$$

Перемещение:

$$|\overrightarrow{\Delta r}|=\sqrt{R^2+R^2}=\sqrt{2}R. \text{ (1.31)}$$

3.1.5 Тело прошло всю окружность.

Путь:

$$L=2\pi R. \text{ (1.32)}$$

Перемещение:

$$|\overrightarrow{\Delta r}|=0. \text{ (1.33)}$$

Заметим, несмотря на то, что тело прошло какой-то путь, перемещение равно нулю, так как тело вернулось в исходную точку.

3.1.6 Тело повернулось по окружности на угол *α*.

Путь:

$$L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}. \ (1.34)$$

Перемещение найдем по теореме косинусов:

$$|\overrightarrow{\Delta r}| = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R \cdot R\cos\alpha} =$$
$$= \sqrt{4R^2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2} = 2R\sin\frac{\alpha}{2}. \ (1.35)$$

Заметим, несмотря на то, что тело прошло какой-то путь, перемещение равно нулю, так как тело вернулось в исходную точку.

3.2 Тело движется «туда и обратно».

Тело движется в одном направлении n км, затем по этой же прямой возвращается обратно и проходит m км.

Нужно помнить, что путь — это длина всей траектории, то есть, для нахождения всего пути направление движения не учитываем, а просто суммируем:

$$L = n + m. \ (1.36)$$

Перемещение — это расстояние между начальной и конечной точкой:

$$|\overrightarrow{\Delta r}| = |n - m|. \ (1.37)$$

3.3 Тело движется на север *n* км, затем поворачивает на восток (запад) и движется еще *m* км.

Путь:

$$L = n + m. \ (1.38)$$

Перемещение найдем по теореме косинусов:

$$|\overrightarrow{\Delta r}| = \sqrt{n^2 + m^2}. \ (1.39)$$

3.4. Как найти проекции и модуль перемещения на координатной плоскости?

При нахождении проекций нужно помнить, что перемещение — это вектор. Следовательно, все операции с перемещением производим как для обыкновенного вектора:

1) если известна длина вектора и его направление, то для нахождения проекций необходимо воспользоваться правилом в пункте 1.3.

2) если известны координаты конца и начала вектора перемещения, то необходимо воспользоваться правилом в пункте 1.4, а для нахождения модуля перемещения пунктом 1.5.

2. Скорость.

2.1 Равномерное прямолинейное движение.

2.1.1 Равномерное прямолинейное движение — это движение, при котором тело за любые равные промежутки времени совершает равные перемещения, двигаясь по прямой линии.

2.1.2 Скорость $(\vec{\nu}\ [\text{м/с}])$ — векторная физическая величина, показывающая какое перемещение совершило тело за единицу времени:

$$\vec{\nu} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}. \ (2.1)$$

При равномерном движении по прямой:

$$\nu = \frac{S}{t}, \ (2.2)$$

где S — путь, проходимый телом за время t.

Для учета направления движения эту формулу запишем в проекциях:

$$\nu_x = \frac{\Delta r_x}{t}, \ (2.3)$$

где Δr_x — перемещение вдоль оси Ox за время t. Знак проекции зависит от направления скорости и оси координат (см. рис. 1):

2.1.3 График проекции скорости от времени.

Так скорость при равномерном движении по прямой является постоянной, то график будет представлять собой прямые линии, параллельные оси времени (см. рис. 2):

Направление движения: если график лежит над осью времени (1 и 2), то проекция положительна и тело движется по направлению оси Ox; в противном случае, когда график расположен ниже оси времени (3 и 4), то проекция скорости отрицательна и тело движется против оси Ox.

Значение скорости: чем дальше от оси времени лежит прямая, тем больше модуль скорости $(|\nu_1| > |\nu_2|,\ |\nu_4| > |\nu_3|)$.

2.1.4 Геометрический смысл площади под графиком в осях $(\nu_x,\ t)$.

Для любого вида движения пройденный телом путь можно определить как площадь под графиком, когда на оси Oy отложена скорость, а на оси Ox — время. Это легко видеть непосредственно из рисунка для равномерного движения (см. рис. 3):

2.1.5 График проекции перемещения.

Из определения (2.3) проекция перемещения при равномерном прямолинейном движении определяется формулой:

$$\Delta r_x = \nu_x t. \ (2.4)$$

График проекции перемещения при равномерном прямолинейном движении — это прямая, выходящая из начала координат.

Направление движения: если прямая лежит над осью времени (поднимается вверх), то тело движется в положительном направлении оси Ox (прямые 1 и 2); если прямая лежит под осью времени (опускается вниз), то тело движется против оси Ox.

Значение скорости: чем больше тангенс угла наклона (чем круче поднимается вверх или опускает вниз), тем больше модуль скорости $(|\nu_1| > |\nu_2|,\ |\nu_4| > |\nu_3|)$.

2.1.6 Закон движения.

Из определения (2.3) имеем:

$$\Delta r_x = x - x_0 = \nu_x t,$$
$$x = x_0 + \nu_x t, \ (2.5)$$

где x_0 — начальная координата тела по оси Ox, x — координата тела в момент времени t, ν_x — проекция скорости на ось Ox.

При движении по прямой всегда возможно выбрать ось Ox вдоль этой прямой. Однако в некоторых случаях удобно рассматривать движение и вдоль оси Oy:

$$\begin{cases} x = x_0 + \nu_x t, \\ y = y_0 + \nu_y t. \end{cases} (2.6)$$

2.1.7 График изменения координаты.

Уравнение координаты при равномерном движении имеет вид (2.5).

График изменения координаты при равномерном движении — это прямая линия.

Направление движения: если с течением времени координата увеличивается (прямая поднимается вверх), то тело движется по направлению оси Ox (прямые 1 и 2); если координата уменьшается (прямая опускается вниз), то движение происходит против оси Ox.

Значение скорости: чем больше тангенс угла наклона (чем круче поднимается вверх или опускает вниз), тем больше модуль скорости; $\nu = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, где Δx — изменение координаты за время Δt.

Начальная координата тел — точка пересечения прямой с вертикальной осью (на рисунке это ось Ox, но мы привыкли, что вертикальная ось — ось Ox).

Время и место встречи двух тел — точка пересечения графиков координат двух тел; из точки пересечения следует опустить перпендикуляры на ось времени и ось координат.

Пересечение прямой c осью времени — точка пересечения прямой c ось времени означает, что тело проехало мимо начала отсчета.

2.2 Средняя скорость неравномерного движения.

2.2.1 Неравномерное движение — это движение с переменной скоростью. Скорость со временем может меняться как угодно — по любому закону.

2.2.2 Средняя векторная скорость.

$$\overrightarrow{\nu_{\text{ср}}} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{t}, (2.7)$$

где $\overrightarrow{\Delta r}$ — перемещение за время t.

2.2.3 Средняя путевая (скалярная) скорость.

$$\nu_{\text{ср}} = \frac{L}{t}. (2.8)$$

где L — весь путь, пройденный за время t.

2.3 Относительность механического движения.

В определении системы отсчета было сказано, что за тело отсчета можно выбирать абсолютно любое тело. В зависимости от выбора такого тела, то есть от выбора системы отсчета, одно и то же движение будет выглядеть по-разному. Например, сидим в движущейся машине — относительно машины мы неподвижны, относительно земли — движемся. Покой относителен. Движение тела относительно и положение тела относительно.

2.3.1 Правило сложения перемещений.

Векторная сумма перемещений

$$\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{\Delta r_1} + \overrightarrow{\Delta r_2}, (2.9)$$

где $\overrightarrow{\Delta r}$ — перемещение относительно неподвижной системы отсчета (НСО), $\overrightarrow{\Delta r_1}$ — перемещение относительно подвижной системы отсчета (ПСО), $\overrightarrow{\Delta r_2}$ — перемещение самой подвижной системы отсчета (СПСО).

2.3.2 Правило сложения скоростей.

Векторная сумма скоростей

$$\vec{\nu} = \overrightarrow{\nu_0} + \vec{u}, \text{ (2.10)}$$

где $\vec{\nu}$ — скорость относительно неподвижной системы отсчета (НСО), $\vec{\nu_0}$ — скорость относительно подвижной системы отсчета (ПСО), $\vec{u}$ — перемещение самой подвижной системы отсчета (СПСО).

2.3.3 Относительная скорость.

Векторная разность скоростей

$$\overrightarrow{\nu_{\text{отн}}} = \overrightarrow{\nu_1} - \overrightarrow{\nu_2}, \text{ (2.11)}$$

где $\overrightarrow{\nu_{\text{отн}}}$ — скорость первого тела относительно второго (относительная скорость), $\overrightarrow{\nu_1}$ — скорость первого тела, $\overrightarrow{\nu_2}$ — скорость второго тела.

К решению задач

2.2.1 Как перевести из км/ч в м/с и т. д?

В задачах часто необходимо переводить из одних единиц измерения в другие:

1 км/ч = (1000 м)/(3600 с) = 5/18 м/с, (2.12)
1 м/с = 18/5 км/ч, (2.13)
1 км/с = 1000 м/с, (2.14)
1 см/с = 0,01 м/с, (2.15)
1 м/мин = 1/60 м/с. (2.16)

Например, если $\nu = 36 \text{ км/ч}$, то для того, чтобы перевести в м/с, нужно умножить на 5/18:

$$36 \text{ км/ч} = 36 \cdot \frac{5}{18} = 10 \text{ м/с}.$$

2.2.2 Как найти скорость тела, если известен закон движения?

Закон равномерного движения имеет вид (2.5):

$$x = x_0 + \nu_x t.$$

Видим, что в этой формуле скорость стоит коэффициентом перед временем. Поэтому, если в условии задачи дан закон движения, необходимо посмотреть на коэффициент перед t — это и есть скорость.

Например, пусть закон движения имеет вид: $x = 3 + 5t$. В данном случае коэффициент перед t равен 5, следовательно, $\nu_x = 5\text{м/с}$.

2.2.3 Как определить скорость по графику координаты от времени?

Закон равномерного движения имеет вид (2.5):

$$x = x_0 + \nu_x t.$$

Графиком этого закона является прямая линия. Так как ν_x — коэффициент перед t, то ν_x является угловым коэффициентом прямой.

Для графика 1:

$$\nu_{x_1} = (\Delta x_1)/(\Delta t_1). \text{ (2.17)}$$

То, что график 1 «поднимается вверх», означает — тело едет в положительном направлении оси Ox.

Для графика 2:

$$\nu_{x_2} = (\Delta x_2)/(\Delta t_2).\ (2.18)$$

То, что график 2 «опускается вниз», означает — тело едет в отрицательном направлении оси Ox.

Для определения Δx и Δt выбираем такие точки на графике, в которых можно точно определить значения, как правило, это точки, находящиеся в вершинах клеток.

2.2.4 Как найти закон движения, если известны координаты тела в моменты времени t_1 и t_2?

Пусть в момент времени t_1 тело находилось в точке с координатой x_1, а в момент времени t_2 тело находилось в точке с координатой x_2. Закон равномерного движения имеет вид (2.5).

Для времени t_1 имеем:

$$x_1 = x_0 + \nu_x t_1.\ (2.19)$$

Для времени t_2 имеем:

$$x_2 = x_0 + \nu_x t_2.\ (2.20)$$

Решая систему уравнений (2.19) и (2.20), получим

$$\nu_x = \frac{x_1 - x_2}{t_1 - t_2},\ (2.21)$$

$$x_0 = \frac{x_2 t_1 - x_1 t_2}{t_1 - t_2}.\ (2.22)$$

2.2.5 Как найти графически момент и координату встречи двух тел?

Пусть даны законы движения двух тел: $x_1 = x_{01} + \nu_{x_1} t$ и $x_2 = x_{02} + \nu_{x_2} t$. Согласно пункту 2.5 графиками обоих законов являются прямые линии. Необходимо на одном графике построить оба закона.

Графики пересекаются в одной точке. Координаты этой точки и являются временем и местом встречи.

2.2.6 Как аналитически найти координату и время встречи двух тел?

Пусть даны законы движения двух тел: $x_1 = x_{01} + \nu_{x_1} t$ и $x_2 = x_{02} + \nu_{x_2} t$. В момент встречи тела оказываются в одной координате, то есть $x_1 = x_2$, и необходимо решить уравнение:

$$x_{01} + \nu_{x_1} t = x_{02} + \nu_{x_2} t.\ (2.17)$$

Решение уравнения имеет вид:

$$t_{\text{встр}} = \frac{|x_{01} - x_{02}|}{|\nu_{x_1} - \nu_{x_2}|}.\ (2.18)$$

Для нахождения координаты достаточно подставить вместо t найденное значение $t_{\text{встр}}$ в любой из законов движения:

$$x_{\text{встр}} = x_{01} + \nu_{x_1} t_{\text{встр}},$$

или

$$x_{\text{встр}} = x_{02} + \nu_{x_2} t_{\text{встр}}.$$

2.2.7 Как найти среднюю скорость, если тело половину пути проехало со скоростью ν_1, а вторую половину пути ν_2?

По определению (2.8):

$$\nu_{\text{ср}} = \frac{L}{t}.$$

В нашем случае, так как на каждой половине пути тело едет с постоянной скоростью, то

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\frac{L}{2}}{\nu_1} + \frac{\frac{L}{2}}{\nu_2} = \frac{L}{2}\left(\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2}\right) \text{ (2.19)}$$

Получаем

$$\nu_{\text{ср}} = \frac{L}{\frac{L}{2}\left(\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2}\right)} = \frac{2\nu_1\nu_2}{\nu_1 + \nu_2}. \text{ (2.20)}$$

В общем случае, если весь путь разбить на *n* равных участков, на каждом из которых тело едет с постоянной скоростью, то

$$\nu_{\text{ср}} = \frac{n}{\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} + \ldots + \frac{1}{\nu_n}}. \text{ (2.21)}$$

Формула (2.21) справедлива только если весь путь разбит на равные участки. Если же разбиение будет иное, то, естественно, формула для нахождения средней скорости, будет иной.

2.2.8 Как найти среднюю скорость, если тело половину времени проехало со скоростью ν_1, а вторую половину времени ν_2?

По определению (2.8):

$$\nu_{\text{ср}} = \frac{L}{t}.$$

В нашем случае, так как каждую половину времени тело едет с постоянной скоростью, то

$$L = L_1 + L_2 = \frac{t}{2}\nu_1 + \frac{t}{2}\nu_2. \text{ (2.22)}$$

Получаем

$$\nu_{\text{ср}} = \frac{\frac{t}{2}\nu_1 + \frac{t}{2}\nu_2}{t} = \frac{\frac{t}{2}(\nu_1 + \nu_2)}{t} = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2). \text{ (2.23)}$$

В общем случае, если все время разбито на *n* равных промежутков, на каждом из которых тело едет с постоянной скоростью, то

$$\nu_{\text{ср}} = \frac{1}{n}(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + +\nu_4). \text{ (2.24)}$$

Формула (2.24) справедлива только если все время разбито на равные промежутки. Если же разбиение будет иное, то, естественно, формула для нахождения средней скорости, будет иной.

2.2.9 Как найти скорость, с которой движется моторная лодка по течению реки?

Согласно формуле (2.10) скорость тела относительно неподвижной системы отсчета ν (в нашем случае земли), равна векторной сумме скорости подвижной системы отсчета *u* (в нашем случае —

скорость реки) и скорости в подвижной системе отсчета ν_0 (в нашем случае — собственная скорость лодки).

$$\vec{\nu} = \overrightarrow{\nu_0} + \vec{u}.$$

При движении по течению вектора $\overrightarrow{\nu_0}$ и $\vec{u}$ направлены в одну сторону, следовательно, получаем сложение двух векторов, направленных в одну сторону — используем формулу (1.15):

$$\nu = \nu_0 + u. \ (2.25)$$

Таким образом, при движении любого тела по течению его скорость определяется формулой (2.25).

2.2.10 Как найти скорость, с которой движется моторная лодка против течения реки?

Согласно формуле (2.10) скорость тела относительно неподвижной системы отсчета ν (в нашем случае земли) равна векторной сумме скорости подвижной системы отсчета u (в нашем случае — скорость реки) и скорости в подвижной системе отсчета ν_0 (в нашем случае — собственная скорость лодки).

$$\vec{\nu} = \overrightarrow{\nu_0} + \vec{\nu}$$

Перепишем формулу в виде:

$$\vec{\nu} = \overrightarrow{\nu_0} - (-\vec{\nu}).$$

Вектора $\overrightarrow{\nu_0}$ и $(-\vec{\nu})$ направлены в одну сторону, следовательно, получаем вычитание двух векторов, направленных в одну сторону — используем формулу (1.16):

$$\nu = \nu_0 - u. \ (2.26)$$

2.2.11 Как найти скорость, с которой движется моторная лодка, если ее скорость направлена перпендикулярно течению реки?

Согласно формуле (2.10) скорость тела относительно неподвижной системы отсчета ν (в нашем случае земли), равна векторной сумме скорости подвижной системы отсчета u (в нашем случае — скорость реки) и скорости в подвижной системе отсчета ν_0 (в нашем случае — собственная скорость лодки).

$$\vec{\nu} = \overrightarrow{\nu_0} + \vec{\nu}$$

В данном случае вектора $\overrightarrow{\nu_0}$ и $\vec{\nu}$ направлены перпендикулярно, следовательно, получаем задачу о сложении взаимно перпендикулярных векторов — используем формулу (1.17):

$$\nu = \sqrt{\nu_0^2 + u^2}. \ (2.27)$$

2.2.12 Как найти расстояние, на которое снесет лодку, если ее скорость направлена перпендикулярно скорости реки?

В результате сложения скоростей по формуле (2.10) скорость тела, относительно земли равна $\vec{\nu}$ и направлена по прямой OD. В результате, когда тело окажется на противоположном берегу, оно попадет в точке D, и его снесет на длину $CD = S$.

Треугольник OAB подобен треугольнику OCD:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{OC}{OA} \Rightarrow \frac{S}{u} = \frac{h}{\nu_0} \Rightarrow S = h\frac{u}{\nu_0}. \ (2.28)$$

2.2.13 Как найти скорость, с которой движется моторная лодка, если ее скорость направлена под углом φ к скорости течения реки?

Согласно формуле (2.10) скорость тела относительно неподвижной системы отсчета v (в нашем случае земли), равна векторной сумме скорости подвижной системы отсчета u (в нашем случае — скорость реки) и скорости в подвижной системе отсчета v_0 (в нашем случае — собственная скорость лодки).

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_0} + \vec{u}.$$

В результате сложения скоростей по формуле (2.10) скорость тела относительно земли равна $\vec{v}$ и направлена по прямой *OB*. Как видим, получили треугольник, в котором известен один из углов — $(180^\circ - \varphi)$. Тогда по теореме косинусов:

$$v = \sqrt{v_0^2 + u^2 - 2v_0 u \cos(180^\circ - \varphi)} = \sqrt{v_0^2 + u^2 + 2v_0 u \cos\varphi}. \quad (2.29)$$

2.2.14 Как найти расстояние, на которое снесет лодку, если ее скорость направлена под углом φ к скорости течения реки?

В результате сложения скоростей по формуле (2.10) скорость тела относительно земли равна $\vec{v}$ и направлена по прямой *OB*. В результате, когда тело окажется на противоположном берегу, оно попадет в точке *B*, и его снесет на длину $\mathrm{AB} = S$.

В задачах, когда движение происходит в плоскости, то есть и вдоль оси *Ox*, и вдоль оси *Oy* (см. рис. 12), необходимо введение системы координат для того, чтобы упростить рассмотрение задачи.

Проекция v_x :

$$v_x = v_0 \cos\varphi + u. \quad (2.30)$$

Проекция v_y :

$$v_y = v_0 \sin\varphi. \quad (2.31)$$

Формулы (2.30) и (2.31) не просто результат математической операции нахождения проекции, v_x и v_y имеют физический смысл: со скоростью v_x тело плывет вдоль оси *Ox*, то есть по течению; со скоростью v_y тело переплывает реку. Например, время, за которое тело переплывет реку, можно найти просто поделив ширину реки на v_y :

$$t_0 = \frac{h}{v_y} = \frac{h}{v_0 \sin\varphi}. \quad (2.32)$$

Тогда

$$S = v_x t_0 = \frac{h}{v_0 \sin\varphi}(v_0 \cos\varphi + u). \quad (2.33)$$

2.2.15 Под каким углом α нужно направить собственную скорость лодки, чтобы за минимальное время переплыть реку?

Согласно формуле (2.31) скорость, с которой лодка переплывает реку, равна:

$$v_y = v_0 \sin\varphi.$$

Очевидно, что время будет минимальным, если ν_y будет максимальным, то есть $\varphi = 90^\circ = \dfrac{\pi}{2}$.

2.2.16 С какой скоростью машина обгоняет вторую машину, если они движутся в одну сторону?

Пусть 1-ая машина движется вправо со скоростью $\overrightarrow{\nu_1}$, а 2-ая машина также движется вправо со скоростью $\overrightarrow{\nu_2}$. Скорость обгона — это скорость, с которой 1-ая машина движется относительно 2-ой, то есть — это относительная скорость, и она определяется формулой (1.16):

$$\overrightarrow{\nu_{\text{отн}}} = \overrightarrow{\nu_1} - \overrightarrow{\nu_2}.$$

Так как $\overrightarrow{\nu_1}$ и $\overrightarrow{\nu_2}$ направлены в одну сторону, то получили задачу о вычитании векторов, направленных в одну сторону — формула (1.16):

$$\nu_{\text{обгона}} = \nu_1 - \nu_2. \ (2.34)$$

Заметим, что при обгоне, естественно $\nu_1 > \nu_2$, поэтому $\nu_{\text{обгона}} > 0$.

2.2.17 За какое время проедут мимо друг друга два поезда, двигающиеся в одном направлении?

Пусть длина 1-го поезда L_1, а скорость 2-го поезда L_2. Скорость обгона определяется формулой (2.34). Тогда

$$t = \frac{L_1 + L_2}{\nu_{\text{обгона}}} = \frac{L_1 + L_2}{\nu_1 - \nu_2}. \ (2.35)$$

2.2.18 С какой скоростью машина едет навстречу вторую машину, если они движутся в противоположных направлениях?

Пусть 1-ая машина движется вправо со скоростью $\overrightarrow{\nu_1}$, а 2-ая машина движется влево со скоростью $\overrightarrow{\nu_2}$. Скорость движения навстречу — это скорость, с которой 1-ая машина движется относительно 2-ой, то есть — это относительная скорость, и она определяется формулой (1.16):

$$\overrightarrow{\nu_{\text{отн}}} = \overrightarrow{\nu_1} - \overrightarrow{\nu_2}.$$

Перепишем эту формулу в виде:

$$\overrightarrow{\nu_{\text{отн}}} = \overrightarrow{\nu_1} - \left(-\overrightarrow{\nu_2}\right).$$

Так как $\overrightarrow{\nu_1}$ и $\left(-\overrightarrow{\nu_2}\right)$ направлены в одну сторону, то получили задачу о вычитании векторов, направленных в одну сторону — формула (1.16):

$$\nu_{\text{встр}} = \nu_1 - \left(-\nu_2\right) = \nu_1 + \nu_2. \ (2.36)$$

2.2.19 За какое время проедут мимо друг друга два поезда, двигающиеся в противоположных направлениях?

Пусть длина 1-го поезда L_1, а скорость 2-го поезда L_2. Скорость обгона определяется формулой (2.34). Тогда

$$t = \frac{L_1 + L_2}{\nu_{\text{встр}}} = \frac{L_1 + L_2}{\nu_1 + \nu_2}. \ (2.37)$$

2.2.20 Как найти относительную скорость, если тела движутся по взаимно перпендикулярным направлениям?

Пусть 1-ая машина движется вправо со скоростью $\overrightarrow{\nu_1}$, а 2-ая машина движется перпендикулярно первой со скоростью $\overrightarrow{\nu_2}$. Относительная скорость определяется формулой (1.16):

$$\overrightarrow{\nu_{\text{отн}}} = \overrightarrow{\nu_1} - \overrightarrow{\nu_2}.$$

Так как вектора $\overrightarrow{\nu_1}$ и $\overrightarrow{\nu_2}$ перпендикулярны, то воспользуемся формулой (1.18):

$\nu_{\text{отн}} = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$. (2.38)

3. Ускорение.

3.1. Равнопеременное движение по прямой.

3.1.1. Равнопеременное движение по прямой — движение по прямой с постоянным по модулю и направлению ускорением: $\vec{a} = const$.

3.1.2. Ускорение ($\vec{a}$ $[\text{м}/\text{с}^2]$**)** — физическая векторная величина, показывающая, на сколько изменится скорость за 1 с.

В векторном виде:

$$\vec{a} = \frac{\vec{\nu} - \overrightarrow{\nu_0}}{t}, \tag{3.1}$$

где $\overrightarrow{\nu_0}$ — начальная скорость тела, $\vec{\nu}$ — скорость тела в момент времени *t*.

В проекции на ось *Ox*:

$$a_x = \frac{\nu_x - \nu_{0x}}{t}, \tag{3.2}$$

где ν_{0x} — проекция начальной скорости на ось *Ox*, ν_x — проекция скорости тела на ось *Ox* в момент времени *t*.

Знаки проекций зависят от направления векторов и оси *Ox*.

$$a = \frac{\nu - \nu_0}{t}. \tag{3.3}$$

$$-a = \frac{\nu - \nu_0}{t}. \tag{3.4}$$

3.1.3. График проекции ускорения от времени.

При равнопеременном движении ускорение постоянно, поэтому будет представлять собой прямые линии, параллельные оси времени (см. рис. 3.3):

Рис. 3

Значение ускорения: чем дальше от оси времени лежит прямая, тем больше модуль ускорения $(|\mathrm{a}_1| > |\mathrm{a}_2|)$.

3.1.4. Скорость при равнопеременном движении.

В векторном виде:

$$\vec{\nu} = \overrightarrow{\nu_0} + \vec{a}t. \tag{3.5}$$

В проекции на ось *Ox*:

$$\nu_x = \nu_{0x} + a_x t. \tag{3.6}$$

Для равноускоренного движения:

$$\nu = \nu_0 + at. \tag{3.7}$$

Для равнозамедленного движения:

$$v = v_0 - at. \tag{3.8}$$

3.1.5. График проекции скорости в зависимости от времени.

График проекции скорости от времени — прямая линия.

Направление движения: если график (или часть его) находятся над осью времени, то тело движется в положительном направлении оси Ox.

Значение ускорения: чем больше тангенс угла наклона (чем круче поднимается вверх или опускает вниз), тем больше модуль ускорения; $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, где Δv — изменение скорости за время Δt.

Пересечение с осью времени: если график пересекает ось времени, то до точки пересечения тело тормозило (равнозамедленное движение), а после точки пересечения начало разгоняться в противоположную сторону (равноускоренное движение).

3.1.6. Геометрический смысл площади под графиком в осях $(v_x,\ t)$.

Площадь под графиком, когда на оси Oy отложена скорость, а на оси Ox — время — это путь, пройденный телом.

На рис. 3.5 нарисован случай равноускоренного движения. Путь в данном случае будет равен площади трапеции:

$S = \frac{1}{2}(v_0 + v)t.$ (3.9)

3.1.7. Формулы для расчета пути

Равноускоренное движение $v = v_0 + at$	**Равнозамедленное движение** $v = v_0 - at$
$S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$ (3.10)	$S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (3.12)
$S = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$ (3.11)	$S = \frac{v_0^2 - v^2}{2a}$ (3.13)
$S = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$ (3.14)	

Все формулы, представленные в таблице, работают только при сохранении направления движения, то есть до пересечения прямой с осью времени на графике зависимости проекции скорости от времени.

Если же пересечение произошло, то движение проще разбить на два этапа:
до пересечения (торможение):

$$t_1 = \frac{v_0}{a}, \tag{3.15}$$

$$S_1 = v_0 t_1 - \frac{at_1^2}{2}. \tag{3.16}$$

После пересечения (разгон, движение в обратную сторону)

$$t_2 = t - t_1, \tag{3.17}$$

$$S_2 = \frac{at_2^2}{2}, \tag{3.18}$$

$$|\overrightarrow{\Delta r}| = |S_1 - S_2|, \tag{3.19}$$

$$L = S_1 + S_2. \tag{3.20}$$

В формулах (3.17)—(3.20) t_1 — время от начала движения до пересечения с осью времени (время до остановки), S_1 — путь, который прошло тело от начала движения до пересечения с осью времени, t_2 — время, прошедшее с момента пересечения оси времени до данного момента t, S_2 — путь, который прошло тело в обратном направлении за время, прошедшее с момента пересечения оси времени до данного момента t, $|\overrightarrow{\Delta r}|$ — модуль вектора перемещения за все время движения, L — путь, пройденный телом за все время движения.

3.1.8. Перемещение за -ую секунду.

За время $t = (n-1)t_0$ тело пройдет путь:

$$S_{n-1} = \nu_0(n-1)t_0 + \frac{a}{2}(n-1)^2 t_0^2. \tag{3.21}$$

За время $t = nt_0$ тело пройдет путь:

$$S_n = \nu_0 n t_0 + \frac{a}{2} n^2 t_0^2. \tag{3.22}$$

Тогда за -й промежуток t_0 тело пройдет путь:

$$S_N = S_n - S_{n-1} = \nu_0 t_0 + (at_0^2)/2(2n-1). \tag{3.23}$$

За промежуток t_0 можно принимать любой отрезок времени. Чаще всего $t_0 = 1$ с.

Если $\nu_0 = 0$, то

$$S_N = \frac{at_0^2}{2}(2n-1). \tag{3.24}$$

Тогда за 1-ую секунду тело проходит путь:

$$S_1 = \frac{a}{2}(2 \cdot 1 - 1) = \frac{a}{2};$$

За 2-ую секунду:

$$S_2 = \frac{a}{2}(2 \cdot 2 - 1) = 3 \cdot \frac{a}{2};$$

За 3-ю секунду:

$$S_3 = \frac{a}{2}(2 \cdot 3 - 1) = 5 \cdot \frac{a}{2};$$

и так далее

Если внимательно посмотрим, то увидим, что $S_2 = 2S_1$; $S_3 = 5S_1$ и так далее

Таким образом, приходим к формуле:

$$S_1 : S_2 : S_3 : \ldots : S_N = 1 : 3 : 5 : \ldots : (2N - 1). \quad (3.25)$$

Словами: пути, проходимые телом за последовательные промежутки времени соотносятся между собой как ряд нечетных чисел, и это не зависит от того, с каким ускорени1111